Relaciones II

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación

- En esta sesión discutiremos dos métodos alternativos para representar relaciones.

Motivación

- Un método utiliza matrices cero-uno.

Motivación

- El otro método usa representaciones pictóricas llamadas grafos dirigidos.

Motivación

- Generalmente, las matrices son apropiadas para la representación de relaciones en programas de computadora.

Motivación

- Por otro lado, las personas a menudo encuentran útil la representación de relaciones utilizando grafos dirigidos para comprender las propiedades de estas relaciones.

Matrices cero-uno I

- Una relación entre conjuntos finitos se puede representar utilizando una matriz cero-uno.

Matrices cero-uno I

- Suponga que R es una relación de $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Matrices cero-uno I

- Aquí los elementos de los conjuntos A y B se han enumerado en un orden particular, pero arbitrario.

Matrices cero-uno I

- Además, cuando $A = B$ usamos el mismo orden para A y B.

Matrices cero-uno II

- La relación R se puede representar mediante la matriz $M_R = [m_{ij}]$, donde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a, b) \in R, \\ 0 \text{ si } (a, b) \notin R. \end{cases}$$

Matrices cero-uno II

- La relación R se puede representar mediante la matriz $M_R = [m_{ij}]$, donde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a,b) \in R, \\ 0 \text{ si } (a,b) \notin R. \end{cases}$$

- En otras palabras, la matriz cero-uno que representa a R tiene un 1 como su entrada (i,j) cuando a_i está relacionada con b_j, y un 0 en esta posición si a_i no está relacionada con b_j.

Matrices cero-uno II

- La relación R se puede representar mediante la matriz $M_R = [m_{ij}]$, donde
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a, b) \in R, \\ 0 \text{ si } (a, b) \notin R. \end{cases}$$
- En otras palabras, la matriz cero-uno que representa a R tiene un 1 como su entrada (i, j) cuando a_i está relacionada con b_j, y un 0 en esta posición si a_i no está relacionada con b_j.
- Esta representación depende de los ordenamientos utilizados para A y B.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Suponga que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Sea R la relación de A a B que contiene (a, b) si $a \in A, b \in B$ y $a > b$. ¿Cuál es la matriz que representa a R si $a_1 = 1, a_2 = 2$ y $a_3 = 3$, y $b_1 = 1$ y $b_2 = 2$?

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Suponga que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Sea R la relación de A a B que contiene (a, b) si $a \in A, b \in B$ y $a > b$. ¿Cuál es la matriz que representa a R si $a_1 = 1, a_2 = 2$ y $a_3 = 3$, y $b_1 = 1$ y $b_2 = 2$?

Solución: Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, la matriz para R es

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los 1s en M_R muestran que los pares $(2, 1), (3, 1)$ y $(3, 2)$ pertenecen a R. Los 0s muestran que ningún otro par pertenece a R. $\square$

Ejemplo 2

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación R representada por la matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Ejemplo 2

Ejemplo 2

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación R representada por la matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Solución: Como R consiste de los pares ordenados (a_i, b_j) con $m_{ij} = 1$, se sigue que

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}.$$

□

Reflexividad de una relación expresada en una matriz

- Recuerde que una relación R sobre A es reflexiva si $(a, a) \in R$ siempre que $a \in A$.

Reflexividad de una relación expresada en una matriz

- Por lo tanto, R es reflexiva si y sólo si $(a_i, a_i) \in R$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Reflexividad de una relación expresada en una matriz

- Así, R es reflexiva si y sólo si $m_{ii} = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- En otras palabras, R es reflexiva si todos los elementos de la diagonal principal de M_R son iguales a 1, como se muestra en la Figura 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz cero-uno para una relación reflexiva, los elementos fuera de la diagonal puden ser 0 o 1.

Reflexividad de una relación expresada en una matriz

- Tenga en cuenta que, en general, los elementos de la diagonal principal pueden ser 0 o 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz cero-uno para una relación reflexiva, los elementos fuera de la diagonal puden ser 0 o 1.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- La relación R es simétrica si $(a, b) \in R$ implica que $(b, a) \in R$.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- En consecuencia, la relación R en el conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es simétrica si y sólo si $(a_j, a_i) \in R$ siempre que $(a_i, a_j) \in R$.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- En términos de las entradas de M_R, R es simétrica si y sólo si $m_{ji} = 1$ siempre que $m_{ij} = 1$.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- Esto también significa $m_{ji} = 0$ siempre que $m_{ij} = 0$.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- En consecuencia, R es simétrica si y sólo si $m_{ij} = m_{ji}$, para todos los pares de enteros i y j con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz I

- Recordando la definición de la transpuesta de una matriz vemos que R es simétrica si y sólo si

$$M_R = (M_R)^t,$$

es decir, si M_R es una matriz simétrica.

Simetría y antisimetría de una relación expresada en una matriz II

- La relación R es antisimétrica si y sólo si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implican que $a = b$.
- En consecuencia, la matriz de una relación antisimétrica tiene la propiedad de que si $m_{ij} = 1$ con $i \neq j$, entonces $m_{ji} = 0$.
- O, en otras palabras, $m_{ij} = 0$ o $m_{ji} = 0$ cuando $i \neq j$.

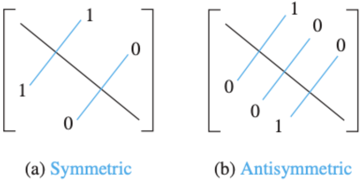


Figura 2: Las matrices cero-uno para relaciones simétricas y antisimétricas.

Ejemplo 3

Suponga que la relación R sobre un conjunto está representada por la matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿R es reflexiva, simétrica y/o antisimétrica?

Solución: Como todos los elementos diagonales de esta matriz son iguales a 1, R es reflexiva. Además, como M_R es simétrica, se sigue que R es simétrica. También es fácil ver que R no es antisimétrica. $\square$

Unión e intersección de relaciones mediante matrices

- Suponga que R_1 y R_2 son relaciones sobre un conjunto A representadas por las matrices M_{R_1} y M_{R_2}, respectivamente.

Unión e intersección de relaciones mediante matrices

- La matriz que representa la unión de estas relaciones tiene un 1 en las posiciones donde M_{R_1} o M_{R_2} tienen un 1.

Unión e intersección de relaciones mediante matrices

- La matriz que representa la intersección de estas relaciones tienen un 1 en las posiciones donde tanto M_{R_1} como M_{R_2} tienen un 1.

Unión e intersección de relaciones mediante matrices

- Por lo tanto, las matrices que representan la unión y la intersección de estas relaciones son

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \qquad \text{y} \qquad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}.$$

Ejemplo 4

Suponga que las relaciones R_1 y R_2 sobre un conjunto A están representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son las matrices que representan $R_1 \cup R_2$ y $R_1 \cap R_2$?

Ejemplo 4

Suponga que las relaciones R_1 y R_2 sobre un conjunto A están representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son las matrices que representan $R_1 \cup R_2$ y $R_1 \cap R_2$?

Solución: Las matrices de estas relaciones son

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Composición de relaciones mediante matrices

- Ahora dirigimos nuestra atención a determinar la matriz para la composición de relaciones.

Composición de relaciones mediante matrices

- Esta matriz se puede encontrar usando el producto booleano de las matrices para estas relaciones.

Composición de relaciones mediante matrices

- En particular, suponga que R es una relación de A a B y que S es una relación de B a C.

Composición de relaciones mediante matrices

- Suponga que A, B y C tienen m, n y p elementos, respectivamente.

- Sean las matrices cero-uno $M_{S\circ R} = [t_{ij}]$, $M_R = [r_{ij}]$ y $M_S = [s_{ij}]$ para $S \circ R$, R y S, respectivamente (estas matrices tienen tamaños $m \times p$, $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente).

Composición de relaciones mediante matrices

- El par ordenado (a_i, c_j) pertenece a $S \circ R$ si y sólo si hay un elemento b_k tal que (a_i, b_k) pertenece a R y (b_k, c_j) pertenece a S.

Composición de relaciones mediante matrices

- Se sigue que $t_{ij} = 1$ si y sólo si $r_{ik} = s_{kj} = 1$ para algún k.

Composición de relaciones mediante matrices

- Por la definición del producto booleano, esto significa que

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S.$$

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Encuentre la matriz que representa la relación $S \circ R$, donde las matrices que representan R y S son

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5

Encuentre la matriz que representa la relación $S \circ R$, donde las matrices que representan R y S son

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: La matriz para $S \circ R$ es

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Potencias de una relación mediante matrices

- La matriz que representa la composición de dos relaciones se puede utilizar para encontrar la matriz para M_{R^n}.

Potencias de una relación mediante matrices

- En particular,

$$M_{R^n} = M_R^{[n]},$$

por la definición de potencias Booleanas.

Ejemplo 6

Encuentre la matriz que representa la relación R^2, donde la matriz que representa a R es

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

Encuentre la matriz que representa la relación R^2, donde la matriz que representa a R es

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: La matriz para R^2 es

$$M_{R^2} = M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Representación de Relaciones usando digrafos

- Hemos demostrado que una relación se puede representar enumerando todos sus pares ordenados o usando una matriz cero-uno.

- Existe otra forma importante de representar una relación mediante una representación pictórica.

Representación de Relaciones usando digrafos

- Cada elemento del conjunto está representado por un punto, y cada par ordenado se representa mediante un arco con su dirección indicada por una flecha.

Representación de Relaciones usando digrafos

- Usamos tales representaciones pictóricas cuando pensamos en las relaciones en un conjunto finito como **grafos dirigidos** o **digrafos**.

Definición 1

Un *grafo dirigido*, o *digrafo*, consiste en un conjunto V de *vértices* (o *nodos*) junto con un conjunto E de pares ordenados de elementos de V llamados *aristas* (o *arcos*). El vértice a se llama *vértice inicial* de la arista (a, b) y el vértice b se llama *vértice terminal* de esta arista.

Definición de digrafo

Definición 1

Un *grafo dirigido*, o *digrafo*, consiste en un conjunto V de *vértices* (o *nodos*) junto con un conjunto E de pares ordenados de elementos de V llamados *aristas* (o *arcos*). El vértice a se llama *vértice inicial* de la arista (a, b) y el vértice b se llama *vértice terminal* de esta arista.

Una arista de la forma (a, a) se representa mediante una arista del vértice hacia sí mismo. Tal arista se llama ciclo.

Ejemplo 7

El grafo dirigido con vértices a, b, c y d, y aristas (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), y (d, b) se muestra en la Figura 3.

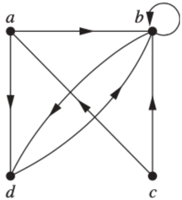


Figura 3: El grafo dirigido del Ejemplo 7.

□

Ejemplo 8

El grafo dirigido de la relación

$$R_1 = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

sobre el conjunto $\{1,2,3,4\}$ se muestra en la Figura 4.

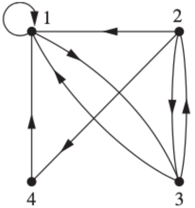


Figura 4: El grafo dirigido de la relación R_1 del Ejemplo 8.

Ejemplo 9

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación R_2 representados por el grafo dirigido que se muestra en la Figura 5?

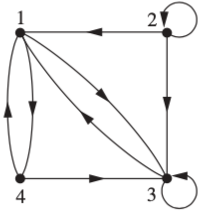


Figura 5: El grafo dirigido de la relación R_2 del Ejemplo 9.

Ejemplo 9

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación R_2 representados por el grafo dirigido que se muestra en la Figura 5?

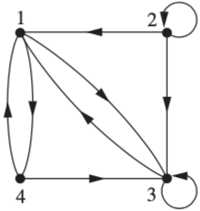


Figura 5: El grafo dirigido de la relación R_2 del Ejemplo 9.

Solución: Los pares ordenados (x, y) en la relación son

$$R_2 = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}.$$

Cada uno de estos pares corresponde a una arista del grafo dirigido, $(2,2)$ y $(3,3)$ corresponden a los dos ciclos en el grafo.

- El grafo dirigido que representa una relación se puede utilizar para determinar si la relación tiene varias propiedades.

- Por ejemplo, una relación es reflexiva si y sólo si hay un ciclo en cada vértice del grafo dirigido, de modo que cada par ordenado de la forma (x, x) ocurre en la relación.

Propiedades de relaciones vía digrafos I

- Una relación es simétrica si y sólo si para cada arista entre vértices distintos en su digrafo hay una arista en la dirección opuesta, de modo que (y, x) está en la relación siempre que (x, y) está en la relación.

Propiedades de relaciones vía digrafos I

- De manera similar, una relación es antisimétrica si y sólo si nunca hay dos aristas en direcciones opuestas entre vértices distintos.

Finalmente, una relación es transitiva si y sólo si siempre que hay una arista de un vértice x a un vértice y y una arista de un vértice y a un vértice z, hay una arista de x a z (completando un triángulo donde cada lado es una arista dirigida con la dirección correcta).

Propiedades de relaciones vía digrafos II

Observación 1

Tenga en cuenta que una relación simétrica se puede representar mediante un grafo no dirigido, que es un grafo en el que las aristas no tienen direcciones.

Ejemplo 10

Determine si las relaciones para los grafos dirigidos que se muestran en la Figura 6 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

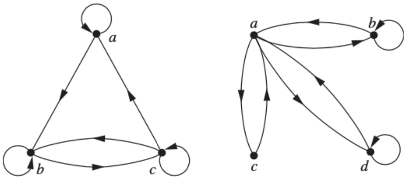
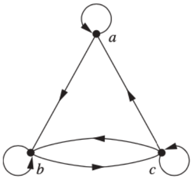


Figura 6: Los grafos dirigidos de las relaciones S_1 y S_2 del Ejemplo 10.

Solución:

Ejemplo 10

Determine si las relaciones para los grafos dirigidos que se muestran en la Figura 6 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.



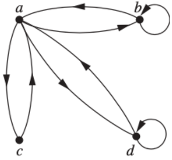


Figura 6: Los grafos dirigidos de las relaciones S_1 y S_2 del Ejemplo 10.

Solución:

- Debido a que hay ciclos en cada vértice del grafo dirigido de S_1, es reflexiva.

Ejemplo 10

Determine si las relaciones para los grafos dirigidos que se muestran en la Figura 6 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

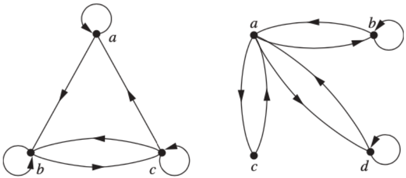
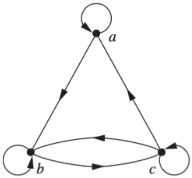


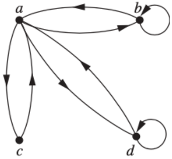
Figura 6: Los grafos dirigidos de las relaciones S_1 y S_2 del Ejemplo 10.

Solución:

- La relación S_1 no es simétrica ni antisimétrica porque hay una arista de a a b pero no una de b a a, pero hay aristas en ambas direcciones que conectan b y c.

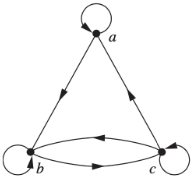
Ejemplo 10 II

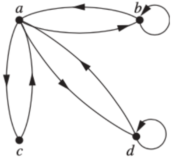




- Por último, S_1 no es transitiva porque hay una arista de a a b y una arista de b a c, pero no hay arista de a a c.

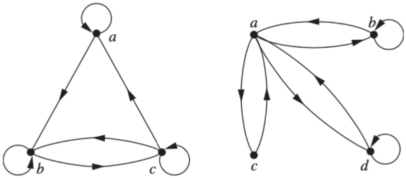
Ejemplo 10 II





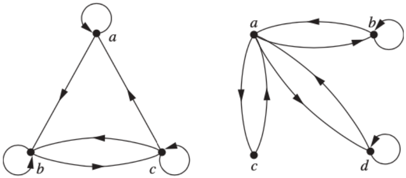
- Ya que los ciclos no están presentes en todos los vértices del grafo dirigido de S_2, esta relación no es reflexiva.

Ejemplo 10 II



- Es simétrica y no antisimétrica, porque cada arista entre vértices distintos está acompañada por una arista en la dirección opuesta.

Ejemplo 10 II



- Tampoco es difícil ver en el grafo dirigido que S_2 no es transitiva, porque (c, a) y (a, b) pertenecen a S_2, pero (c, b) no pertenece a S_2. $\square$

Ejercicios I

1. Represente cada una de estas relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ con una matriz (con los elementos de este conjunto enumerados en orden creciente).
    1. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
    2. $\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$
    3. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
    4. $\{(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$
2. Enumere los pares ordenados en las relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ correspondientes a estas matrices (donde las filas y columnas corresponden a los números enteros listados en orden creciente).
    1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
    2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Determine si las relaciones representadas por las matrices en el ejercicio 2 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.
4. Sean R_1 y R_2 relaciones sobre un conjunto A representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre las matrices que representan

1. $R_1 \cup R_2$.
2. $R_1 \cap R_2$.
3. $R_1 \circ R_2$.
4. $R_2 \circ R_1$.
5. $R_1 \oplus R_2$[1].

5. Sea R la relación representada por la matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Encuentre las matrices que representan

   1. R^2.
   2. R^3.
   3. R^4.

6. Enumere los pares ordenados en las relaciones representadas por los grafos dirigidos de la Figura 7.

Ejercicios IV

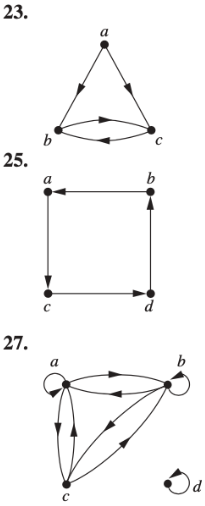


Figura 7: Grafos dirigidos para los Ejercicios 6 y 7.

7. Determine si las relaciones representadas por los grafos dirigidos de la Figura 7 son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.
8. Sea R una relación sobre un conjunto A. Explique cómo usar el grafo dirigido que representa a R para obtener el grafo dirigido que representa la relación inversa R^{-1}.

[1] donde $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$.